

Cours 2 : Existence et unicité pour

(PC)

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Lemme 2.1 : Soit $f \in C(D, \mathbb{R}^n)$, $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ouvert.

Alors $x(t)$ est une solution de (PC) ssi $x(t)$ satisfait l'équation intégrale (formule de Duhamel)

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds.$$

Preuve : cf. exos.

Définition 2.1 : Soit $k > 0$. $f : E \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est dite k -lipschitzienne en x sur E (unifor-

mémoire p.r. à t) si

$$\forall (t, x_1), (t, x_2) \in E, \quad |f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq k |x_1 - x_2|.$$

Notation: $|y| := \sum_{i=1}^n |y_i|, \quad y \in \mathbb{R}^n$

Lemme 2.2: Soit

$$G = \{(t, x); |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n.$$

Supposons $f \in C^0(G, \mathbb{R}^n)$, f k -lipschitzienne en x .

Alors (PC) possède une unique solution $x(t)$

sur $[t_0 - \gamma, t_0 + \gamma]$, où

$$\gamma := \min \{a, b/M\}, \quad M := \max_{(t, x) \in G} |f(t, x)|.$$

Preuve: L'unicité sera démontrée en exercice.

Pour prouver l'existence, considérons la suite de fonctions $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ définie sur $\mathcal{I} := [t_0 - \gamma, t_0 + \gamma]$

рат

$$X_0(t) \equiv X_0,$$

si $X_m(t) \rightarrow X(t)$

alors $x(t)$ va
satisfaire la
formule de Duhamel

$$\left[\begin{aligned} X_{m+1}(t) &= X_0 + \int_{t_0}^t f(s, X_m(s)) ds, \quad m \in \mathbb{N}_0. \\ &\quad \parallel \\ &\quad \{0, 1, 2, \dots\} \end{aligned} \right.$$

Etape 1: Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, $t \in \mathbb{J}$:

(2.1)

$$|x_m(t) - x_0| \leq b,$$

$$d^r \varphi$$

$$(t, x_m(t)) \in G \quad (\text{car } t \in J \Rightarrow |t - t_0| \leq a)$$

Il est clair que x_0 satisfait (2.1).

Supposons que $x_m(t)$ satisfait (2.1), pour un certain $m \in \mathbb{N}$. Alors $(t, x_m(t)) \in G$ et $|f(t, x_m(t))| \leq M$, pour tout $t \in J$. Ainsi,

$$|x_{m+1}(t) - x_0| = \left| \int_{t_0}^t f(s, x_m(s)) ds \right| \leq M |t - t_0| \leq M \gamma \leq b,$$

d'où $(t, x_{m+1}(t)) \in G$, pour tout $t \in J$.

Etape 2: La suite de fonctions $\{x_m\}$ est uniformément Cauchy, donc uniformément convergente, sur l'intervalle J .

Nous allons montrer par récurrence que

$$(2.2) \quad |x_{j+1}(t) - x_j(t)| \leq \frac{M k^j |t - t_0|^{j+1}}{(j+1)!} \leq \frac{M k^j \gamma^{j+1}}{(j+1)!} \quad \forall j \geq 0 \quad \forall t \in \mathcal{I}.$$

On déduit de cette estimation que

$$(2.3) \quad |x_{m+p}(t) - x_m(t)| \leq |x_{m+p}(t) - x_{m+p-1}(t)| \\ + |x_{m+p-1}(t) - x_{m+p-2}(t)| \\ \vdots \\ + |x_{m+1}(t) - x_m(t)| \\ \leq M \sum_{j=m}^{m+p-1} \frac{k^j \gamma^{j+1}}{(j+1)!} \quad \forall m, p \geq 0, \quad \forall t \in \mathcal{I}.$$

Puisque la série $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{k^j \gamma^{j+1}}{(j+1)!}$ est convergente,

(2-3) montre que $\{x_n\}$ est unif. Cauchy sur $\mathcal{I}$.

Pour compléter l'étape 2, il reste à prouver (2.2).

Premièrement,

$$|x_1(t) - x_0(t)| = \left| \int_{t_0}^t f(s, x_0) ds \right| \leq M |t - t_0| \leq M \gamma \quad \checkmark$$

Supposons maintenant (2.2) vrai pour un $j \geq 0$.

Alors, pour $t \in \mathcal{I}$, $t \geq t_0$,

$$\begin{aligned} |x_{j+2}(t) - x_{j+1}(t)| &\leq \int_{t_0}^t |f(s, x_{j+1}(s)) - f(s, x_j(s))| ds \\ &\leq k \int_{t_0}^t |x_{j+1}(s) - x_j(s)| ds \leq M k^{j+1} \int_{t_0}^t \frac{(s - t_0)^{j+1}}{(j+1)!} ds \end{aligned}$$

$$= \frac{M k^{j+1} (t-t_0)^{j+2}}{(j+2)!} = \frac{M k^{j+1} |t-t_0|^{j+2}}{(j+2)!} \leq \frac{M k^{j+1} \gamma^{j+2}}{(j+2)!} \quad \checkmark$$

Un argument similaire prouve le cas $t \in \mathcal{I}$, $t < t_0$.

Etape 3 : Conclusion

Soit $x: \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$ la limite uniforme de $\{x_n\}$.

Par le lemme 2.1, il suffit de montrer que x satisfait

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds, \quad t \in \mathcal{I}.$$

Pour ce faire, nous passons à la limite $n \rightarrow \infty$

dans l'équation de récurrence qui définit $\{x_m\}$.
Il suffit donc de montrer que

$$f(s, x_m(s)) \longrightarrow f(s, x(s))$$

uniformément sur J , lorsque $m \rightarrow \infty$, cf. exos. #

Définition 2.2: $f: E \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est

dite localement lipschitzienne en x sur E si
pour tout $(\underline{t}, \underline{x}) \in E$ il existe un voisinage $\underline{V}$
de $(\underline{t}, \underline{x})$ dans E et une constante $\underline{k} > 0$ t.q.
 f est $\bar{k}$ -lipschitzienne en x sur $\underline{V}$ (uniformé-
ment p.r. à t).

Théorème 2.1 (Picard)

Soit D un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et $(t_0, x_0) \in D$.
Supposons $f \in C^0(D, \mathbb{R}^n)$ et f localement
lipschitzienne en x sur D . Alors il existe $\gamma > 0$
tel que (PC) a une unique solution sur $[t_0 - \gamma, t_0 + \gamma]$.

Preuve: Puisque D est ouvert, il existe $a, b > 0$
t.q. $(t_0, x_0) \in G \subset D$, où G est défini au
lemme 2.2. Puisque f est localement lipschitzienne,
on peut choisir $a, b > 0$ (assez petits) t.q.
 f soit lipschitzienne en x sur G . La conclusion
découle alors du lemme 2.2. $\#$

Dans le cas où f n'est pas localement lipschitzienne en x , on a le résultat suivant.

Théorème 2.2 (Cauchy - Peano)

Soit D un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et $(t_0, x_0) \in D$.

Supposons $f \in C^0(D, \mathbb{R}^n)$. Alors il existe $\gamma > 0$ tel que (PC) a une solution sur $[t_0 - \gamma, t_0 + \gamma]$.

Preuve: cf. Kong.

Remarque 2.1: Sous les hypothèses du Thm 2.2, la solution de (PC) peut être unique ou non.

Par exemple, comme vu aux exercices :

- avec $f(t, x) = f(x) = \begin{cases} x \ln |x|, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

La solution de (PC) est unique, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$

- avec $f(t, x) = f(x) = \sqrt{|x|}$,

(PC) avec $x_0 = 0$ admet une infinité de solutions.

Équation Exemple 2.1 : $\underline{x' = 1 + t^2 x^2}$, $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}$

de Riccati. Avec $f(t, x) = 1 + t^2 x^2$, on a $f \in C(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$
pas intégrable explicitement et $f_x(t, x) = 2t^2 x$ continue sur $\mathbb{R}^2$
contrairement à celle de la série 1 $\hookrightarrow f$ est localement lipschitz. en x et le thm 2.1
donne existence et unicité, pour tous $t_0, x_0 \in \mathbb{R}$